8.2.9 Úlohy s geometrickou posloupností

Předpoklady: 8204, 8208

Pedagogická poznámka: Při řešení příkladů postupujeme tak, aby ti nejpomalejší spočítali alespoň příklady 1, 3, 4, 5.

Souhrn vzorců a pravidel pro geometrickou posloupnost:

- $a_{n+1} = a_n \cdot q$ - poznávací znamení
- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ - vzorec pro n-tý člen
- $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$ - vztah mezi a_s a a_r
- $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ pro $q \neq 1$, $s_n = na_1$ pro $q = 1$ - součet prvních n členů posloupnosti.

Př. 1: Urči a_1 a q geometrické posloupnosti, pro kterou platí $a_1 - a_3 = -16$; $a_1 + a_2 = 8$.

Máme zdánlivě neřešitelný problém: tři neznámé, ale pouze dvě rovnice.
Řešení: všechny členy geometrické posloupnosti můžeme vyjádřit pomocí a_1 a $q \Rightarrow$ provedeme toto nahrazení a dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$

Dosadíme do rovnic:

$a_1 - a_3 = -16 \Rightarrow a_1 - a_1 \cdot q^2 = -16$

$a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot q = 8$

Upravíme rovnice:

$a_1(1 - q^2) = -16$

$a_1(1 + q) = 8 \Rightarrow a_1$ i $(1 - q)$ jsou nenulová čísla (jinak by na pravé straně rovnice byla 0) $\Rightarrow$ rovnice vydělíme:

$$\frac{a_1(1 - q^2)}{a_1(1 + q)} = \frac{-16}{8}$$

$1 - q = -2 \Rightarrow q = 3$

Dosazením do druhé rovnice určíme a_1: $a_1(1 + q) = a_1(1 + 3) = 8 \Rightarrow a_1 = 2$

Pro hledanou posloupnost platí: $a_1 = 2$, $q = 3$.

Poznámka: Příklad jsme samozřejmě mohli řešit také dosazovací metodou: $a_1(1 + q) = 8 \Rightarrow$ $a_1 = \dfrac{8}{1 - q}$ a dosadit do první rovnice.

Př. 2: Urči a_1 a q geometrické posloupnosti, pro kterou platí $a_7 - a_3 = 15$; $a_6 - a_4 = -6$.

Máme zdánlivě neřešitelný problém: čtyři neznámé, ale pouze dvě rovnice.
Řešení: všechny členy geometrické posloupnosti můžeme vyjádřit pomocí a_1 a q $\Rightarrow$ provedeme toto nahrazení a dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:
$a_3 = a_1 \cdot q^2$, $a_4 = a_1 \cdot q^3$, $a_6 = a_1 \cdot q^5$, $a_7 = a_1 \cdot q^6$
Dosadíme do rovnic:
$a_7 - a_3 = 15 \Rightarrow a_1 \cdot q^6 - a_1 \cdot q^2 = 15$
$a_6 - a_4 = -6 \Rightarrow a_1 \cdot q^5 - a_1 \cdot q^3 = -6$
Upravíme rovnice:
$a_1 \cdot q^2 \left(q^4 - 1\right) = 15$
$a_1 \cdot q^3 \left(q^2 - 1\right) = -6 \Rightarrow a_1$ i $(1-q)$ jsou nenulová čísla (jinak by na pravé straně rovnice byla 0) $\Rightarrow$ rovnice vydělíme:

$$\frac{a_1 \cdot q^2 \left(q^4 - 1\right)}{a_1 \cdot q^3 \left(q^2 - 1\right)} = \frac{15}{-6}$$

$$\frac{\left(q^2 - 1\right)\left(q^2 + 1\right)}{q\left(q^2 - 1\right)} = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{q^2 + 1}{q} = -\frac{5}{2} \qquad / \cdot 2q$$

$$2q^2 + 2 = -5q$$

$$2q^2 + 5q + 2 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$$q_1 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}$$

Dosazením do jedné z rovnic dopočítáme a_1:

$$a_1 \cdot q^2 \left(q^4 - 1\right) = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 1\right] = 15$$

$$\frac{a_1}{4}\left[\frac{1}{16} - 1\right] = \frac{a_1}{4}\left(-\frac{15}{16}\right) = 15 \Rightarrow a_1 = -64$$

$$q_2 = \frac{-5-3}{4} = -2$$

Dosazením do jedné z rovnic dopočítáme a_1:

$$a_1 \cdot q^2 \left(q^4 - 1\right) = a_1 \cdot (-2)^2 \left[(-2)^4 - 1\right] = 15$$

$$4a_1 (16 - 1) = 4a_1 \cdot 15 = 15 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$$

Zadání vyhovují dvě geometrické posloupnosti: $a_1 = -64$, $q = -\frac{1}{2}$ a $a_1 = \frac{1}{4}$, $q = -2$.

Poznámka: Příklad jsme mohli řešit také vyjádřením všech členů posloupnosti pomocí a_3 a q.

Př. 3: Urči a_1 a q geometrické posloupnosti, pro kterou platí $a_2 \cdot a_4 = 36$; $a_2 + a_4 = 13$.

Zdánlivě stejný příklad jako dva předchozí, ale pozor, jsou zde dva rozdíly:

- v rovnicích figurují pouze dva členy posloupnosti
- v jedné z rovnic je součin těchto členů

$\Rightarrow$ dosazení a_1 a q do rovnic by situaci zkomplikovalo (jedna z rovnic by byla kvadratická pro obě neznámé) $\Rightarrow$ určíme ze soustavy členy a_2 a a_4 a s jejich pomocí pak určíme členy posloupnosti

Řešíme soustavu:

$a_2 \cdot a_4 = 36$

$a_2 + a_4 = 13 \Rightarrow a_2 = 13 - a_4$ dosadíme do první rovnice

$(13 - a_4)a_4 = 36$ dále značíme neznámou už pouze jako a

$13a - a^2 = 36$

$a^2 - 13a + 36 = 0$

$(a-9)(a-4) = 0$

$\Rightarrow$ 2. řešení

1. řešení

$a_4 = 9$, $a_2 = 13 - a_4 = 13 - 9 = 4$

použijeme vztah mezi členy a_r a a_s: $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

$a_4 = a_2 \cdot q^{4-2}$

$9 = 4 \cdot q^2$

$q^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow q = \pm\frac{3}{2}$

$a_2 = a_1 \cdot q \quad a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$

$a_2 = a_1 \cdot q \quad a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{4}{-\frac{3}{2}} = -\frac{8}{3}$

Pro hledanou posloupnost platí: $a_1 = \frac{8}{3}$, $q = \frac{3}{2}$ nebo $a_1 = -\frac{8}{3}$, $q = -\frac{3}{2}$

2. řešení

$a_4 = 4$, $a_2 = 13 - a_4 = 13 - 4 = 9$

použijeme vztah mezi členy a_r a a_s: $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

$a_4 = a_2 \cdot q^{4-2}$

$4 = 9 \cdot q^2$

$q^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow q = \pm\frac{2}{3}$

$a_2 = a_1 \cdot q \quad a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2}$

$a_2 = a_1 \cdot q \quad a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{9}{-\frac{2}{3}} = -\frac{27}{2}$

Pro hledanou posloupnost platí: $a_1 = \frac{27}{2}$, $q = \frac{2}{3}$ nebo $a_1 = -\frac{27}{2}$, $q = -\frac{2}{3}$

Pedagogická poznámka: Studenti často zapomínají na řešení se zápornými koeficienty. Jinak příklad je podle mě hezký právě proto, že vyžaduje orientaci v rychle rostoucí množině řešení.

Př. 4: Urči tři reálná čísla větší než 32 a menší než 162 taková, že spolu s čísly 32 a 162 tvoří pět po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti.

Vypíšeme si, jak by hledaná posloupnost vypadala:
$a_1 = 32$, $a_2 = ?$, $a_3 = ?$, $a_4 = ?$, $a_5 = 162$

Známe členy a_1 a a_5, člen a_5 musí jít vyjádřit pomocí vzorce pro n-tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$

$162 = 32 \cdot q^4$

$q^4 = \frac{162}{32} = \frac{81}{16} \Rightarrow q = \pm\frac{3}{2}$, zápornou hodnotu q můžeme vyloučit, protože druhý člen posloupnosti by byl záporný a tím menší než 32, což zakazuje zadání.
Teď můžeme snadno dopočítat zbývající členy posloupnosti:

$a_2 = a_1 \cdot q = 32 \cdot \frac{3}{2} = 48$

$a_3 = a_2 \cdot q = 48 \cdot \frac{3}{2} = 72$

$a_4 = a_3 \cdot q = 72 \cdot \frac{3}{2} = 108$

pro kontrolu: $a_5 = a_4 \cdot q = 108 \cdot \frac{3}{2} = 162$

Hledaná čísla jsou 48, 72, 108.

Př. 5: Urči a_1 v geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 2$, jestliže platí: $a_n = 384$ a $s_n = 765$.

Pro součet geometrické řady s_n platí vzorec $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ a platí $s_n = 765 \Rightarrow$ sestavíme rovnici: $a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 765$

Dosadíme $q = 2$: $a_1 \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 765$

$a_1\left(2^n-1\right)=765$

Neznáme n, zkusíme hodnotu určit z rovnice pro n-tý člen: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

$384=a_1\cdot 2^{n-1}$ $\Rightarrow$ pokud bychom chtěli určit přímo n, museli bychom logaritmovat, ale nám stačí určit hodnotu 2^n, to z předchozí rovnice půjde: $384=a_1\cdot 2^{n-1}\quad /\cdot\frac{2}{a_1}$

$\frac{768}{a_1}=2^n$ $\Rightarrow$ dosadíme do rovnice $a_1\left(2^n-1\right)=765$

$a_1\left(\frac{768}{a_1}-1\right)=765$

$768-a_1=765$

$a_1=3$

Prvním členem posloupnosti je číslo 3.

Př. 6: Vyřeš rovnici: $x-3x+9x-27x+...+729x=2735$.

Na levé straně je součet prvních n členů geometrické řady: $a_1=x$; $q=-3$; $a_n=729x$.

Všechny členy pravé strany můžeme sečíst pomocí vzorce: $s_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$.

Musíme dopočítat hodnotu n pomocí členu $a_n=729x$: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

$729x=x\cdot(-3)^{n-1}$

$729=(-3)^{n-1}$

$(-3)^6=(-3)^{n-1}$ $\Rightarrow$ $n-1=6\Rightarrow n=7$

Dosadíme do vztahu pro součet: $s_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}=x\frac{(-3)^7-1}{(-3)-1}=x\frac{-2188}{-4}=547x$

Sestavíme rovnici: $547x=2735$

$x=\frac{2735}{547}=5$

Řešením rovnice je číslo 5.

Př. 7: Petáková:
strana 68/cvičení 20 c) e)
strana 68/cvičení 33
strana 69/cvičení 44
strana 69/cvičení 46
strana 70/cvičení 51 d) e)
strana 70/cvičení 53 b)

Shrnutí: